



TITLE:

# Scaling limit of a model of quantum electrodynamics

AUTHOR(S):

広島, 文生

---

CITATION:

広島, 文生. Scaling limit of a model of quantum electrodynamics. 数理解析研究所講究録 1997, 980: 1-11

ISSUE DATE:

1997-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60878>

RIGHT:

## Scaling limit of a model of quantum electrodynamics

北大・理 広島 文生 (Fumio Hiroshima)

1948年, T.A.Welton は [1] で電磁場と, Potential  $V$  をもった1個の電子との相互作用系に対してその相互作用の影響による「Effective potential  $V_{eff}$ 」を定義した. A.Arai は [2] においてその Effective potential が, その系の相互作用ハミルトニアン (Pauli-Fierz モデル) のレゾルベントの, ある漸近極限として現れることを示した.

今回の報告は, [2] で扱われた Pauli-Fierz モデルよりも, もっと物理的に厳密なモデルに対して Effective potential を求め, [2] のそれと比較するというものである. ([3]).

## 1 自己共役作用素の漸近極限

$\mathcal{H}$  と  $\mathcal{K}$  をそれぞれ  $\mathbb{C}$  上の可分なヒルベルト空間とし

$$\mathcal{X} = \mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$$

とおく.  $A$  と  $B$  をそれぞれ  $\mathcal{H}$  と  $\mathcal{K}$  上の非負自己共役作用素とする.  $\{C_\kappa\}_{\kappa>0}$  を  $\mathcal{X}$  上の対称作用素の族,  $F_j, j=1,2$  を  $\mathbb{R}_+$  上の実数値関数として, 次の条件 A を仮定する.

条件 A

(1) 全ての  $\kappa > 0$  に対して,  $D(A \otimes I) \subset D(C_\kappa)$  かつ 全ての  $\lambda > 0$  に対して  $C_\kappa(A \otimes I + \lambda)^{-1}$  は  $\mathcal{X}$  上の有界線形作用素で

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|C_\kappa(A \otimes I + \lambda)^{-1}\| = 0$$

を満たす. ただし, この収束は, ある  $\kappa_0 > 0$  が存在して  $\kappa > \kappa_0$  に関して一様である.

(2)  $\mathcal{X}$  上のある対称作用素  $C$  が存在して  $D(A \otimes I) \subset D(C)$ , かつ

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} C_\kappa(A \otimes I + \lambda)^{-1} = C(A \otimes I + \lambda)^{-1}.$$

(3) 全ての  $\kappa > 0$  に対して,  $F_1(\kappa) \geq 0$ . また  $j=1,2$  に対して  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} F_j(\kappa) = F_j < \infty$ .  $\square$

ヒルベルト空間  $\mathcal{X}$  上に線形作用素  $H_{0,\kappa}$  と  $H_\kappa$  をを次のように定義する.

$$\begin{aligned} H_{0,\kappa} &= F_1(\kappa)A \otimes I + \kappa I \otimes B + F_2(\kappa), \\ H_\kappa &= H_{0,\kappa} + C_\kappa. \end{aligned}$$

定理 1.1 ([2]) 作用素  $H_\kappa$  は  $D(\mathbf{A} \otimes I) \cap D(I \otimes \mathbf{B})$  上で自己共役かつ下から有界である. さらに 自己共役作用素  $H_{0,\kappa}$  の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

ヒルベルト空間  $\mathcal{X}$  上稠密に定義された線形作用素  $S$  が「 $S \in \mathbf{E}(\mathcal{X})$ 」とは  $\mathcal{H}$  と  $\mathcal{K}$  でそれぞれ稠密な 2 つの部分集合  $D_{\mathcal{H}}(S)$  と  $D_{\mathcal{K}}(S)$  が存在して

$$D_{\mathcal{H}}(S) \hat{\otimes} D_{\mathcal{K}}(S) \subset D(S)$$

を満たすことである. ここで  $\hat{\otimes}$  は代数的テンソル積を表す.  $S \in \mathbf{E}(\mathcal{X})$ ,  $f \in \mathcal{K}$ ,  $g \in D_{\mathcal{K}}(S)$  に対して  $\mathcal{H}$  上稠密に定義された線形作用素  $E_{f,g}(S)$  を次で定義する.

$$D(E_{f,g}(S)) = D_{\mathcal{H}}(S),$$

$$(u, E_{f,g}(S)v)_{\mathcal{H}} = (u \otimes f, S(v \otimes g))_{\mathcal{X}}, \quad u \in \mathcal{H}, \quad v \in D_{\mathcal{H}}(S).$$

定理 1.2 ([2])  $\text{Ker} \mathbf{B} = \{\alpha f | \alpha \in \mathbb{C}\}$  とし,  $P_0$  を  $\mathcal{K}$  から  $\text{Ker} \mathbf{B}$  への射影作用素とする. さらに, 対称作用素  $C$  は  $C \in \mathbf{E}(\mathcal{X})$  で  $D_{\mathcal{K}}(C) \supset \text{Ker} B$  と仮定する. このとき,  $z \in \mathbb{C}$  で,  $\Im z \neq 0$  または  $z < 0$  で  $|z|$  が十分大きいものに対して

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} (H_\kappa - z)^{-1} = (H_{\text{eff}} - z)^{-1} \otimes P_0.$$

ただし,  $\mathbf{A}$  上の作用素  $H_{\text{eff}}$  は  $E_{f,f}(C) = E_{\text{eff}}(C)$  とおいて

$$H_{\text{eff}} = F_1 \mathbf{A} + E_{\text{eff}}(C) + F_2.$$

□

ここで, 自己共役作用素  $H_{\text{eff}}$  は  $H_\kappa$  の  $\kappa \approx \infty$  での Effective 作用素とよばれている ([2]).

## 2 Boson Fock 空間と Bogoliubov 変換

$\mathcal{F}(\mathcal{H})$  を  $\mathcal{H}$  上の Boson-Fock 空間とする.  $f \in \mathcal{H}$  に対して生成・消滅演算子をそれぞれ  $a^\dagger(f)$ ,  $a(f)$  とおく.  $\Omega \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$  を Fock 真空として

$$\mathcal{F}_0(\mathcal{H}) = \mathcal{L}\{a^\dagger(f_1) \dots a^\dagger(f_n) \Omega, \Omega | f_j \in \mathcal{H}, j = 1, \dots, n, n \geq 1\}$$

とおく. よく知られているように  $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$  は  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  で稠密であり,  $a^\dagger(f)$  は  $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$  上で

$$[a^\dagger(f), a^\dagger(g)] = 0$$

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)$$

を満たす (CCR). ここで,  $[A, B] = AB - BA$ . さらに,  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  上の個数演算子を  $N$  とおくと

$$\|a^\dagger(f)\Phi\| \leq \|f\| \|(N+1)^{\frac{1}{2}}\Phi\|, \quad \Phi \in D(N^{\frac{1}{2}}), \quad (2.1)$$

$$[a^\dagger(f), N]\Psi = \pm a^\dagger(f)\Psi, \quad \Psi \in D(N^{\frac{3}{2}}), \quad (2.2)$$

を満たす ([4],[5]). 次に我々は,  $a^\dagger$  の 1 次結合で CCR を満たすものを考えたい. そのために, ヒルベルト空間  $\mathcal{H}$  上の Symplectic 群  $\Sigma(\mathcal{H})$  を定義する.

定義 2.1 ([6],[7])  $\mathcal{H}$  上の 2 つの有界線形作用素の族  $\{T_\kappa\}$  と  $\{S_\kappa\}$  に対して  $\mathcal{H} \oplus \mathcal{H}$  上の作用素の族

$$\Xi_\kappa = \begin{pmatrix} S_\kappa & T_\kappa \\ \overline{T_\kappa} & \overline{S_\kappa} \end{pmatrix}$$

が「Symplectic 群  $\Sigma(\mathcal{H})$  に含まれる」とは次の関係を満たすことである.

$$\Xi_\kappa^* \mathbf{J} \Xi_\kappa = \Xi_\kappa \mathbf{J} \Xi_\kappa^* = \mathbf{J}, \quad \kappa > 0.$$

ここで,

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \Xi_\kappa^* = \begin{pmatrix} S_\kappa^* & \overline{T_\kappa^*} \\ T_\kappa^* & \overline{S_\kappa^*} \end{pmatrix}.$$

□

2 つの有界線形作用素の族  $\{T_\kappa\}$  と  $\{S_\kappa\}$ , さらに, ベクトルの族  $\{L_\kappa\} \subset \mathcal{H}$  によって  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  上の作用素の族  $B_\kappa(f)$  と  $B_\kappa^\dagger(f)$  を

$$\begin{aligned} B_\kappa^\dagger(f) &= a^\dagger(\overline{S_\kappa} f) + a(\overline{T_\kappa} f) + (\overline{L_\kappa}, f), \\ B_\kappa(f) &= a^\dagger(T_\kappa f) + a(S_\kappa f) + (L_\kappa, f) \end{aligned}$$

と定義する. このとき, この対応

$$a^\dagger(f) \longrightarrow B_\kappa^\dagger(f)$$

を Bogoliubov 変換とよぶ. 次の事実はよく知られている.

定理 2.2 ([7],[8]) 全ての  $\kappa > 0$  に対して  $\Xi_\kappa \in \Sigma(\mathcal{H})$  と仮定する. このとき, 各  $\kappa > 0$  に対して  $T_\kappa$  が Hilbert-Schmidt 作用素であることは, 各  $\kappa > 0$  ごとに  $\mathcal{F}(\mathcal{H})$  上のユニタリー作用素  $U_\kappa$  で次を満たすものが存在するための必要十分条件である.

$$U_\kappa^{-1} B_\kappa^\dagger(f) U_\kappa = a^\dagger(f), \quad f \in \mathcal{H}.$$

さらに, このとき,  $U_\kappa \Omega \in \mathcal{D}_\infty$  である. ここで,  $\mathcal{D}_\infty = \cap_{n=1}^\infty \mathcal{D}(\mathbf{N}^n)$ .

注意 2.3 具体的に  $U_\kappa$  は  $a^\dagger(f)$ ,  $S_\kappa$ ,  $T_\kappa$ ,  $L_\kappa$  によって構成することができる. ([3],[7],[8]).

我々は, ここで ユニタリー作用素  $U_\kappa$  の  $\kappa \rightarrow \infty$  での強収束性を問題にする. そのために, 次の条件 B を導入する.

条件 B

$\mathcal{H}$  上の Hilbert-Schmidt 作用素  $T$  と有界線形作用素  $S$ , そしてベクトル  $L \in \mathcal{H}$  が存在して,

$$(1) s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} T_\kappa = T, \quad (2) u - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} S_\kappa = S, \quad (3) s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} L_\kappa = L \quad (4) \lim_{\kappa \rightarrow \infty} T_\kappa^* T_\kappa = T^* T.$$

を満たす. ここで (4) はトレースノルムの位相による収束である. □

このとき明らかに,

$$\Xi = \begin{pmatrix} S & T \\ \bar{T} & \bar{S} \end{pmatrix}$$

とおくと  $\Xi \in \Sigma(\mathcal{H})$  であり, 定理 2.2 より Bogoliubov 変換を引き起こすユニタリー作用素  $U$

$$U^{-1}B^\dagger(f)U = a^\dagger(f), \quad f \in \mathcal{H}$$

が存在することが分かる.

定理 2.4 ([3]) 条件 B を仮定する. このとき, 任意の  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対して, 次が成り立つ.

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} N^m U_\kappa \Omega = N^m U \Omega. \quad (2.3)$$

証明:  $m = 0$  のときだけを示す. このとき, 次の評価式が成立する ([3], [10])

$$\|U_\kappa \Omega - U \Omega\| \leq \|T_\kappa S_\kappa^{-1} - TS^{-1}\|_1 \times \exp\left(\|(T_\kappa S_\kappa^{-1})^* T_\kappa S_\kappa^{-1}\|_1 + \|(TS^{-1})^* TS^{-1}\|_1 + 1\right).$$

ここで  $\|\cdot\|_1$  はトレースノルムを表す. 故に 条件 B (2)(4) より結果をえる.  $\square$

定理 2.5 ([3]) 条件 B を仮定する. このときユニタリー作用素  $U_\kappa$  は  $\kappa$  について強連続でかつ

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} U_\kappa = U.$$

証明:  $U_\kappa$  の強連続性及び強収束性は  $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$  の稠密性により,  $\Phi = a^\dagger(f_1) \dots a^\dagger(f_n) \Omega$  なるベクトルの上で示せば十分である. これはを示すためには,  $U_\kappa \Omega \in \mathcal{D}_\infty$  及び (2.1), (2.2), 条件 B (1)(2) より (2.3) を示せば十分であることが分かる. これは, 定理 2.4 より従う.  $\square$

### 3 QED の双極子近似モデル

これから  $d$  次元空間  $\mathbb{R}^d (d \geq 3)$  の中で, 電磁場と 1 個の電子が相互作用しているという状況を考える. モデルの定義から始める.

$$\underbrace{L^2(\mathbb{R}^d) \oplus \dots \oplus L^2(\mathbb{R}^d)}_{d-1} \equiv \mathcal{W}$$

とおく.  $\mathcal{W}$  上の Boson Fock 空間を  $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$  とおいて, それ上の生成・消滅演算子を  $a^\dagger(f)$ ,  $a(f)$  とそれぞれおく. 簡単のために

$$a^\dagger(0 \oplus \dots \underbrace{f}_{r\text{ 番目}} \dots \oplus 0) \equiv a^{\dagger(r)}(f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leq r \leq d-1$$

とかく. 偏極ベクトル  $e^{(r)} (1 \leq r \leq d-1)$  とは可測関数  $e^{(r)} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  で次ぎをみたすものである.

$$(1) k \cdot e^{(r)}(k) = 0, \quad (2) e^{(r)}(k) \cdot e^{(s)}(k) = \delta_{rs}, \quad (a.e. k \in \mathbb{R}^d).$$

偏極ベクトル  $e^{(r)}$  の第  $\mu$  成分を  $e_\mu^{(r)}$  とかくことにする. このとき, Colomb ゲージにより量子化された「時刻 0 の場の演算子  $A_\mu(x, f)$ 」とは

$$A_\mu(x, f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r=1}^{d-1} \left\{ a^{\dagger(r)} \left( \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{c\omega}} e_\mu^{(r)} e^{-ix \cdot \hat{f}} \right) + a^{(r)} \left( \frac{\sqrt{\hbar}}{\sqrt{c\omega}} e_\mu^{(r)} e^{ix \cdot \hat{f}} \right) \right\}$$

で定義される. ここで  $\hat{f}$  はフーリエ変換,  $\hat{f}(k) = f(-k)$ ,  $c$  は光速,  $\hbar$  はプランク定数  $/ 2\pi$ ,  $\omega(k) = |k|$  である. もちろん, 生成・消滅演算子の定義より  $\hat{f}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$  である.

無限個の光子 (電磁場) と 1 つの電子が相互作用している状態ベクトルの空間を

$$\mathcal{F} \equiv L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$$

で定義する.  $\mathcal{F}$  上に 双極子近似 を施した「光子と電子の相互作用ハミルトニアン  $\mathbf{H}(V)$ 」を

$$\mathbf{H}(V) = \frac{1}{2m} \sum_{\mu} (-i\hbar \partial_{\mu} \otimes I + eI \otimes A_{\mu}(\rho))^2 + I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) + V \otimes I$$

と定義する. ここで,  $A_{\mu}(\rho) = A_{\mu}(0, \rho)$ ,  $V$  は電子のポテンシャル,  $e$  は電子の電荷,  $m > 0$  は電子の質量,  $\partial_{\mu}$  は一般化された  $\mu$  方向の微分作用素,  $\hat{\omega} = \underbrace{\omega \oplus \dots \oplus \omega}_{d-1}$ ,  $d\Gamma(\hat{\omega})$  は  $\hat{\omega}$  の第 2 量子化演算子, さらに  $\hat{\rho}$  は回転不変な正值無限階微分可能急減少関数で

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\rho}^2(k)}{\omega^3(k)} dk < \infty$$

と仮定する. この  $\rho$  は紫外線切断とよばれている. 双極子近似 とは相互作用ハミルトニアン  $\mathbf{H}(V)$  を定義するときに, 時刻 0 の場の演算子を  $A_{\mu}(x, \rho) \rightarrow A_{\mu}(0, \rho)$  とおきかえた操作のことである.

$V = 0$  とした相互作用ハミルトニアン  $\mathbf{H}(0)$  は  $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \hat{\otimes} \mathcal{F}_0^{EM}(\mathcal{W})$  上で  $\Delta = \hbar^2 \sum_{\mu} \partial_{\mu}^2$  とおいて

$$\mathbf{H}(0) = \underbrace{\frac{1}{2m} \Delta \otimes I}_{\text{電子の部分}} + \underbrace{\sum_{\mu} \frac{e}{m} (-i\hbar \partial_{\mu}) \otimes A_{\mu}(\rho)}_{\text{相互作用の部分}} + \underbrace{\sum_{\mu} \frac{e^2}{2m} I \otimes A_{\mu}(\rho)^2 + I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega})}_{\text{場の部分}}$$

と展開される. ここで,  $\sum_{\mu} I \otimes A_{\mu}(\rho)^2$  の項を省いたものが Pauli-Fierz モデルである.

**定理 3.1** ([9]) 相互作用ハミルトニアン  $\mathbf{H}(0)$  は  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$  上の自己共役作用素であり, さらに自己共役作用素  $-\Delta \otimes I + I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$  の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

双極子近似を施しているために  $\mathbf{H}(0)$  中の「相互作用の部分」に微分演算子とかけ算演算子のカップリングが現れない. 故に,  $\mathbf{H}(0)$  を Constant Fiber Direct Integral 表示 ([9],[10]) することができる. 即ち

$$\mathbf{H}(0) \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathbf{H}_{boson}(p) dp.$$

ここで  $\cong$  はユニタリー同値を表し,  $\mathbf{H}(p)$  は

$$\mathbf{H}_{boson}(p) = \frac{1}{2m} \sum_{\mu} p_{\mu}^2 + \sum_{\mu} \frac{e}{m} p_{\mu} A_{\mu}(\rho) + \sum_{\mu} \frac{e^2}{2m} A_{\mu}(\rho)^2 + \hbar c d\Gamma(\hat{\omega})$$

となる  $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$  上の作用素である.

**定理 3.2** ([9]) 各点  $p \in \mathbb{R}^d$  ごとに  $\mathbf{H}_{boson}(p)$  ( $p \in \mathbb{R}^d$ ) は  $D(d\Gamma(\hat{\omega}))$  上の自己共役作用素であり, さらに自己共役作用素  $d\Gamma(\hat{\omega})$  の任意のコア上で本質的に自己共役である.

□

## 4 相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}(0)$ の対角化

この章の目的は,  $\mathbf{H}(0)$  をユニタリー変換することにより

$$\underbrace{\mathbf{A} \otimes \mathbf{I}}_{\text{電子の部分}} + \underbrace{\mathbf{I} \otimes \mathbf{B}}_{\text{場の部分}}$$

という形に移すことである (我々はこれを「対角化」とよんでいる). 即ち, 相互作用の部分ユニタリー作用素の中に押し込めてしまい, ハミルトニアン自身を, 見かけ上全く自由なもの (相互作用していない) にしてしまおうというわけである. そのための準備をする ([9],[11],[12]).

$$D(s) = m - \frac{e^2}{c^2} \frac{d-1}{d} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\hat{\rho}(k)^2}{s + i\epsilon - k} dk, \quad s \in [0, \infty)$$

と定義する. ここで, 上の収束は意味をもち, 任意の  $s \in [0, \infty)$  に対して  $|D(s)| > \delta > 0$  となる, 正数  $\delta$  が存在することが知られている. このことより, 我々は,

$$Q(k) = \frac{\hat{\rho}(k)}{D(k^2)}, \quad k \in \mathbb{R}^d$$

を各点ごとに定義することができる. さらに  $G$  を

$$(Gf)(k) = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{f(k')}{(k^2 - k'^2 + ih)(kk')^{\frac{d}{2}-1}} dk'.$$

で定義する.  $G$  は  $L^2(\mathbb{R}^d)$  および  $L^2(\mathbb{R}^d, \omega^{1-\frac{d}{2}} dk)$  上の有界線形作用素になることが知られている.

$$T_{\mu\nu} f = \delta_{\mu\nu} f + \frac{e^2}{c^2} Q \omega^{\frac{d}{2}-1} G \omega^{\frac{d}{2}-1} d_{\mu\nu} \hat{\rho} f, \quad (1 \leq \mu, \nu \leq d)$$

とにおいて,  $W_{\pm}^{(r,s)} (1 \leq r, s \leq d-1)$  を次で定義する.

$$\begin{aligned} W_+^{(r,s)} f &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega}} e_{\mu}^r T_{\mu\nu}^* e_{\nu}^s \sqrt{\omega} + \sqrt{\omega} e_{\mu}^r T_{\mu\nu}^* e_{\nu}^s \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) f, \\ W_-^{(r,s)} f &= \frac{1}{2} \sum_{\mu, \nu} \left( \frac{1}{\sqrt{\omega}} e_{\mu}^r T_{\mu\nu}^* \tilde{e}_{\nu}^s \sqrt{\omega} - \sqrt{\omega} e_{\mu}^r T_{\mu\nu}^* \tilde{e}_{\nu}^s \frac{1}{\sqrt{\omega}} \right) \tilde{f}. \end{aligned}$$

ここで  $d_{\mu\nu} = \sum_r e_\mu^{(r)} e_\nu^{(r)}$ . 簡単のために

$$\mathbf{W}_\pm = (W_\pm^{(r,s)})_{1 \leq r,s \leq d-1}, \quad \mathbf{L} = (L_\mu^{(r)})_{1 \leq \mu \leq d, 1 \leq r \leq d-1} = \begin{pmatrix} L_1^{(1)} & \cdots & L_d^{(1)} \\ \vdots & & \vdots \\ L_1^{(d-1)} & \cdots & L_d^{(d-1)} \end{pmatrix}$$

とおく. ここで後のために  $m, c, e$  に対するスケーリングを次のように定義する.

$$m(\kappa) = m\kappa^{-2}, \quad e(\kappa) = e\kappa^{-\frac{1}{2}}, \quad c(\kappa) = c\kappa. \quad (4.1)$$

以後,  $m, c, e$  をパラメータとして含むような対象  $A$  に対して, (4.1) によってスケーリングされたものを断りなしに  $A_\kappa$  とかくことにする.

**補題 4.1** ([3], [9]) 有界線形作用素の族  $\mathbf{W}_{\kappa\pm} : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}$  とベクトルの族  $L_\kappa \in \mathcal{W}$  は次を満たす.

(1) 全ての  $\kappa > 0$  に対して,  $\mathbf{W}_{\kappa-}$  は *Hilbert-Schmidt* 作用素である.

(2)  $\Xi(\mathbf{W}_{\kappa\pm}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{W}_{\kappa+} & \mathbf{W}_{\kappa-} \\ \overline{\mathbf{W}_{\kappa-}} & \overline{\mathbf{W}_{\kappa+}} \end{pmatrix}$  とおく.

このとき, 全ての  $\kappa > 0$  に対して

$$\Xi(\mathbf{W}_{\kappa\pm}) \in \Sigma(\mathcal{W}).$$

(3) 全ての  $\mathbf{f} \in \mathcal{W}$ , 全ての  $\kappa > 0$  に対して

$$B_\kappa(\mathbf{f}, p) \equiv a^\dagger(\mathbf{W}_{\kappa-}\mathbf{f}) + a(\mathbf{W}_{\kappa+}\mathbf{f}) + (\mathbf{L}_\kappa \cdot p, \mathbf{f})$$

$$B_\kappa^\dagger(\mathbf{f}, p) \equiv a^\dagger(\overline{\mathbf{W}_{\kappa+}\mathbf{f}}) + a(\overline{\mathbf{W}_{\kappa-}\mathbf{f}}) + (\overline{\mathbf{L}_\kappa} \cdot p, \mathbf{f})$$

とおく. このとき,

$$\exp(it\mathbf{H}_{\text{boson}, \kappa}(p)) B_\kappa^\dagger(\mathbf{f}, p) \exp(-it\mathbf{H}_{\text{boson}, \kappa}(p)) = B_\kappa^\dagger(e^{-ithc\hat{\omega}}\mathbf{f}, p).$$

□

**補題 4.1** (1)(2) より, 全ての  $p \in \mathbb{R}^d$  に対してユニタリー作用素  $\mathcal{U}_\kappa(p)$  で

$$\mathcal{U}_\kappa^{-1}(p) B_\kappa^\dagger(\mathbf{f}, p) \mathcal{U}_\kappa(p) = a^\dagger(\mathbf{f}) \quad (4.2)$$

となるものが存在することが分かる. また (4.2) と定理 4.1 (3) より  $E_\kappa(p) \in \mathbb{R}^d$  で

$$\exp(-it\mathbf{H}_{\text{boson}, \kappa}(p)) \mathcal{U}_\kappa(p) \Omega = \exp(-itE_\kappa(p)) \mathcal{U}_\kappa(p) \Omega$$

となるものが存在することが分かる. 具体的に, この  $E_\kappa(p)$  は

$$E(p) = \frac{1}{2m} \hbar^2 p^2 (1 - 2\Lambda + \Lambda^2) - \eta,$$

で与えられることが分かっている ([3], [9]). ここで, 実数  $\Lambda, \eta$  は次で与えられる.

$$\Lambda = \frac{e^2}{2c^2} \left( \frac{Qe_\mu^r}{\sqrt{\omega^3}}, (\mathbf{W}_+^{-1})^{(r,s)} \frac{\hat{\rho}e_\mu^s}{\sqrt{\omega}} \right), \quad \eta = \frac{e^2}{8mc} \left( \frac{\hat{\rho}e_\mu^r}{\sqrt{\omega}}, (\mathbf{W}_- \mathbf{W}_+^{-1})^{(r,s)} \frac{\hat{\rho}e_\mu^s}{\sqrt{\omega}} \right).$$



さらに,  $m', m_0, m_{00}$  を次で定義する.

$$\frac{1}{2m'} = \frac{1}{2m} - \frac{2\Lambda}{2m} + \frac{\Lambda^2}{2m}, \quad \frac{1}{m_0} = \frac{2\Lambda}{m}, \quad \frac{1}{m_{00}} = \frac{\Lambda^2}{m}.$$

**補題 4.2** 全ての  $\kappa > 0$ , 全ての  $p \in \mathbb{R}^d$  に対して, ユニタリー作用素  $U_\kappa(p)$  は  $D(d\Gamma(\hat{\omega}))$  をそれ自身の上に移して

$$U_\kappa^{-1}(p) \mathbf{H}_{boson, \kappa}(p) U_\kappa(p) = \frac{1}{2m'_\kappa} \hbar^2 \sum_\mu p_\mu^2 + \kappa \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) - \eta_\kappa. \quad (4.3)$$

証明: 補題 4.1(3) によって  $\mathcal{F}_0(\mathcal{H})$  上で

$$\exp\left(i \frac{t}{\hbar} \mathbf{H}_{boson, \kappa}(p)\right) = U_\kappa(p) \exp\left\{i c t d\Gamma(\hat{\omega}) + i \frac{t}{\hbar} E_\kappa(p)\right\} U_\kappa^{-1}(p) \quad (4.4)$$

となることが分かる. (4.4) の両辺はともに  $t$  に関する 1 パラメーターユニタリー群なので, Stone の定理によって (4.3) をえる.  $\square$

$\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$  上のユニタリー作用素  $U(p)$  から Constant Fiber Direct Integral をによって  $\mathcal{F}$  上のユニタリー作用素  $U_\kappa$  を次で定義する.

$$U_\kappa = \int_{\mathbb{R}^d}^\oplus U_\kappa(p) dp.$$

**定理 4.3** ([3]) 全ての  $\kappa > 0$  に対して, ユニタリー作用素  $U_\kappa$  は  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$  をそれ自身の上に移して  $\mathbf{H}_\kappa(0)$  を次のように対角化する.

$$U_\kappa^{-1} \mathbf{H}_\kappa(0) U_\kappa = -\frac{1}{2m'_\kappa} \Delta \otimes I + \kappa I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) - \eta_\kappa.$$

証明: (4.3) 及び Constant Fiber Direct Integral の定義より容易に分かる.  $\square$

## 5 相互作用ハミルトニアン $\mathbf{H}_\kappa(V)$ の漸近挙動

この章では, スケーリングされた相互作用ハミルトニアン  $\mathbf{H}_\kappa(V)$  の  $\kappa \rightarrow \infty$  での, そのレゾルベントの挙動およびその Effective potential を調べる. そのために, Potential  $V$  に対して次の条件 **C** を仮定する.

**条件 C**

(1)  $D(-\Delta) \subset D(V)$  かつ, 全ての  $\lambda > 0$  に対して  $V(-\Delta + \lambda)^{-1}$  は有界線形作用素で

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|V(-\Delta + \lambda)^{-1}\| = 0.$$

(2) 全ての  $t > 0$ , 全ての  $x \in \mathbb{R}^d$  に対して,

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-t|x-y|^2} |V(y)| dy < \infty.$$

$\square$

注意 5.1 *Colomb Potential* は 条件 C を満たしている ([2]).

次に  $\mathbf{H}_\kappa(V)$  に対して, 「質量のくりこまれたハミルトニアン  $\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V)$ 」を

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\kappa^{REN}(V) = & \left( -\frac{1}{2m_{0\kappa}}\Delta + V \right) \otimes I + \kappa \sum_{\mu} \frac{e}{m} (-i\hbar\partial_{\mu}) \otimes A_{\mu}(\rho) \\ & + \sum_{\mu} \frac{e^2}{2m} I \otimes A_{\mu}(\rho)^2 + \kappa I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) \end{aligned}$$

で定義する. このとき定理 4.3 より  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$  上で, 有用な関係式

$$\mathcal{U}_{\kappa}^{-1} \mathbf{H}_{\kappa}(V) \mathcal{U}_{\kappa} = -\frac{1}{2m'_{\kappa}} \Delta \otimes I + \kappa I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) + C_{\kappa}(V) - \eta_{\kappa} \equiv \widetilde{\mathbf{H}}_{\kappa}(V) \quad (5.1)$$

$$\mathcal{U}_{\kappa}^{-1} \mathbf{H}_{\kappa}^{REN}(V) \mathcal{U}_{\kappa} = -\frac{1}{2m_{00\kappa}} \Delta \otimes I + \kappa I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}) + C_{\kappa}(V) - \eta_{\kappa} \equiv \widetilde{\mathbf{H}}_{\kappa}^{REN}(V) \quad (5.2)$$

をえる. ここで  $C_{\kappa}(V) = \mathcal{U}_{\kappa}^{-1}(V \otimes I) \mathcal{U}_{\kappa}$  とおいた. 後でみるように (補題 5.4)  $C_{\kappa}(V)$  は  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$  上でうまく定義されている.

補題 5.2 ([3]) 次の (1) ~ (4) が成立する.

- (1)  $u - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{\kappa+} = I$ , (2)  $s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{\kappa-} = 0$ , (3)  $s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} L_{\mu, \kappa}^{(r)} = \frac{e}{m} \frac{e_{\mu}^r \sqrt{\hbar}}{\sqrt{2c^3 \omega^3}} \hat{p} \equiv L_{\mu, \infty}^{(r)}$ ,  
 (4)  $\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathbf{W}_{\kappa-}^* \mathbf{W}_{\kappa-} = 0$ , (トレースノルム位相).

□

定理 5.3 ([3])  $\mathcal{F}$  上のあるユニタリー作用素  $\mathcal{U}_{\infty}$  が存在して

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \mathcal{U}_{\kappa} = \mathcal{U}_{\infty}.$$

証明: 第 2 章との対応関係

$$T_{\kappa} = \mathbf{W}_{\kappa-}, S_{\kappa} = \mathbf{W}_{\kappa+}, L_{\kappa} = \bigoplus_r \sum_{\mu} p_{\mu} L_{\mu, \kappa}^{(r)}, T = 0, S = I, L = \bigoplus_r \sum_{\mu} p_{\mu} L_{\mu, \infty}^{(r)}$$

によって, 補題 5.2 はまさしく 条件 B に対応していることが分かる. 故に定理 2.5 より従う. □

補題 5.4 ([3])  $\mathcal{U}_{\infty}^{-1}(V \otimes I) \mathcal{U}_{\infty} = C_{\infty}(V)$  とおく. このとき, (1) ~ (3) が成立する.

(1) 全ての  $\kappa > 0$  に対して,  $D(C_{\kappa}(V)) \supset D(-\Delta \otimes I)$  さらに 全ての  $\lambda > 0$  に対して,  $C_{\kappa}(V)(-\Delta \otimes I + \lambda)^{-1}$  は有界線形作用素で  $\kappa > 0$  について一様に

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|C_{\kappa}(V)(-\Delta \otimes I + \lambda)^{-1}\| = 0.$$

(2)  $D(C_\infty(V)) \supset D(-\Delta \otimes I)$ , さらに, 全ての  $\lambda > 0$  に対して

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} C_\kappa(V)(\Delta \otimes I + \lambda)^{-1} = C_\infty(V)(\Delta \otimes I + \lambda)^{-1}.$$

(3) 全ての  $\kappa > 0$  に対して  $m_{00\kappa} > 0$  で次の (i)(ii) が成り立つ.

$$(i) \ s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \frac{1}{2m_{00\kappa}} = \frac{1}{2m} \left( \frac{e^2}{2mc^2} \right)^2 \left\| \frac{\hat{\rho}}{\omega} \right\|^4 \equiv \frac{1}{2m_\infty}, \quad (ii) \ s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \eta_\kappa = 0.$$

証明:  $\mathcal{U}_\kappa$  と  $-\Delta \otimes I$  の可換性と定理 5.3 および 条件 C より容易に導くことができる.  $\square$

**定理 5.5** ([3])

(1) 全ての  $\kappa > 0$  に対して  $\widetilde{H}_\kappa(V)$ ,  $\widetilde{H}_\kappa^{REN}(V)$  はそれぞれ  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar cd\Gamma(\hat{\omega}))$  上自己共役かつ下から有界である. さらに自己共役作用素  $-\Delta \otimes I + I \otimes \hbar cd\Gamma(\hat{\omega})$  の任意のコア上で本質的に自己共役である.

(2)  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{F}^{EM}(\mathcal{W})$  でそれぞれ稠密な 2 つの集合を

$$D_{L^2(\mathbb{R}^d)}(C_\infty(V)) = D(-\Delta), \quad D_{\mathcal{F}^{EM}}(C_\infty(V)) = D(d\Gamma(\hat{\omega}))$$

として  $C_\infty(V) \in \mathcal{E}(\mathcal{F})$  である. さらにこのとき  $E_\Omega(C_\infty(V)) = V_{eff}$  とおくと,  $z \in \mathbb{C}$  で,  $\Im z \neq 0$  または  $z < 0$  で  $|z|$  十分大きいものに対して

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} \left( \widetilde{H}_\kappa^{REN}(V) - z \right)^{-1} = \left( -\frac{1}{2m_\infty} \Delta + V_{eff} - z \right)^{-1} \otimes P_0$$

ここで,  $P_0$  は  $\mathcal{F}^{EM}$  から  $\{\alpha\Omega | \alpha \in \mathbb{C}\}$  への射影作用素である.

証明: 第 1 章との対応関係

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d), \mathcal{K} = \mathcal{W}, C_\kappa = C_\kappa(V), C = C_\infty(V), A = -\Delta, B = \hbar cd\Gamma(\hat{\omega}),$$

$$F_1(\kappa) = \frac{1}{2m_{00\kappa}}, \text{ または } F_1(\kappa) = \frac{1}{2m_\kappa}, F_2(\kappa) = \eta_\kappa.$$

によって, 補題 5.4 はまさしく 条件 A にほかならない. 故に定理 1.1, 1.2 より従う.  $\square$

**注意 5.6** 定理 1.1 は, 条件 A(1) 及び (3) の  $F_1(\kappa) \geq 0$  を仮定するだけで成立する. 故に,  $\widetilde{H}_\kappa(V)$  の自己共役性は,  $m'_\kappa \rightarrow 0$  となるが問題はない.

$V_{eff}$  は Effective Potential とよばれ, その具体的な形は

$$V_{eff}(x) = (2\pi C(\rho))^{-\frac{d}{2}} \int dy e^{-|x-y|^2/2C(\rho)} V(y)$$

$$C(\rho) = \frac{d-1}{2d} \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^2 \frac{e^2}{\hbar c} \int dk \frac{|\hat{\rho}(k)|^2}{\omega(k)^3}.$$

となることが知られている ([2],[3]). これらのことより, 我々は次の主定理をえる.

**定理 5.7 ([3])**

(1) 全ての  $\kappa > 0$  に対して  $\mathbf{H}_\kappa(V)$ ,  $\mathbf{H}_\kappa^{REN}(V)$  はそれぞれ  $D(-\Delta \otimes I) \cap D(I \otimes \hbar c d\Gamma(\hat{\omega}))$  上自己共役で下から有界である.

(2)  $z \in \mathbb{C}$  で,  $\Im z \neq 0$  または  $z < 0$  で  $|z|$  が十分大きいとする. このとき

$$s - \lim_{\kappa \rightarrow \infty} (H_\kappa^{REN}(V) - z)^{-1} = \mathcal{U}_\infty \left\{ \left( -\frac{1}{2m_\infty} \Delta + V_{eff} - z \right)^{-1} \otimes P_0 \right\} \mathcal{U}_\infty^{-1},$$

証明: (1) は定理 5.5(1) 及び (5.1)(5.2) より従う. (2) は定理 5.3 5.5(2) 及び (5.1) より従う.  $\square$

**注意 5.8** 我々の求めた *Effective potential* は [2] のそれと一致している.

**REFERENCES**

- 1 T.A.Welton, "Some observable effects of the quantum mechanical fluctuations of the electromagnetic field", Phys.Rev.**74**, 1157(1948).
- 2 A.Arai, "An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model", J.Math.Phys.**31**, 2653(1990).
- 3 F.Hiroshima, "Scaling limit of a model of quantum electrodynamics", J.Math.Phys.**34**,4478 (1993)
- 4 江沢洋, 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社.
- 5 M.Reed and B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II*, Academic Press, New York, 1978.
- 6 P.Kristensen, L.Mejlbo and E.Thue.Poulsen, "Tempered distributions in infinitely many dimensions II, displacement operators", Math.scand.**14**, 129(1964).
- 7 F.A.Berezin, *Method of Second Quantization*, Accademic Press, New York, (1966).
- 8 S.N.M.Ruijsenaars, "On Bogoliubov transformations. II. The general case", Ann.Phys.**116**, 105(1978).
- 9 A.Arai, "A note on scattering theory in nonrelativistic quantum electrodynamics", J.Phys.A.Math. Gen.**16**, 49(1983).
- 10 M.Reed and B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics IV*, Academic Press, New York, 1978.
- 11 A.Arai, "On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalarfield I", J.Math.Phys.**22**, 2539(1981).
- 12 A.Arai, "Rigorous theory of spectra and radiation for a model in a quantum electrodynamics", J.Math.Phys. **24**, 1896(1983).